ALGO

WWW.ALGORITMOSTEM.IT

SCIENCE TECHNOLOGY ENGINEERING MATHEMATICS

Appunti di Analisi2: Integrazione multipla

UNI - Matematica

rev.0.1 - 05 set 2023

Draft version

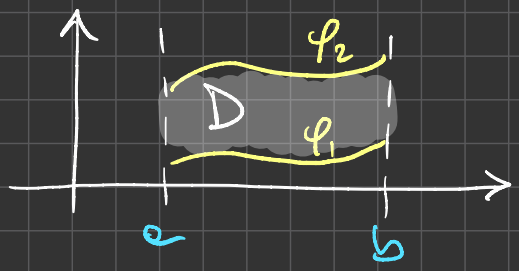
Appunti in formato bozza, intesi esclusivamente di ausilio alle lezioni, che le integrano nelle descrizioni e nei ragionamenti su quanto viene riportato in queste pagine.

Licenza Creative Commons CCBYNCND.
È consentita la condivisone del documento originale a condizione che non venga modificato né utilizzato a scopi commerciali, sempre attribuendo la paternità dell'opera all'autore

Integrali doppi

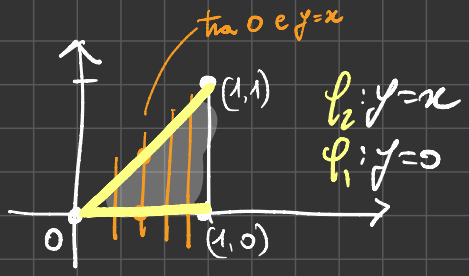
1) Dominio semplice rispetto all'asse y

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \ \ y \in [\varphi_1(x); \varphi_2(x)]\}$$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

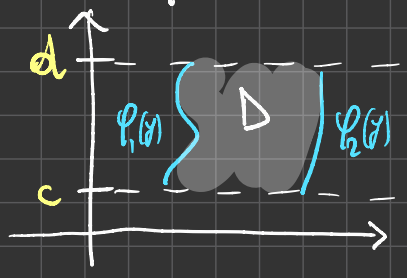
Esempio



$$\int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=x} xy\,dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} x \int_{y=0}^{y=x} y\,dy\,dx = \ldots = \frac{1}{8}$$

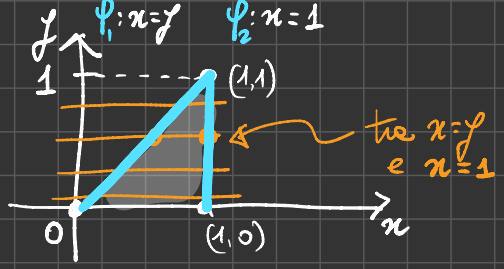
2) Dominio semplice rispetto all'asse x

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d] \ \ x \in [\varphi_1(y); \varphi_2(y)]\}$$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=a}^{y=b} \left(\int_{x=\varphi_1(y)}^{x=\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

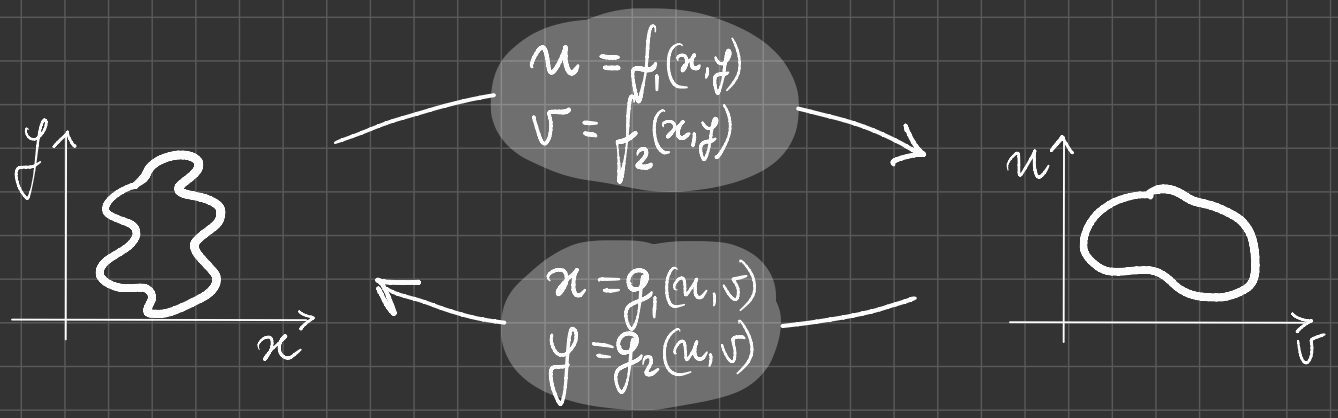
Esempio



$$\int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=y}^{1} xy\,dx \right) dy = \int_{y=0}^{1} y \int_{x=y}^{x=1} x\,dx\,dy = \ldots = \frac{1}{8}$$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Trasformazioni del Dominio



Le trasformazioni determinano una variazione dell'area pari al valore assoluto del determinante della matrice Jacobiana, che deve essere considerata nel calcolo di integrali

Fattore di Trasformazione: $J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

valore assoluto

determinante

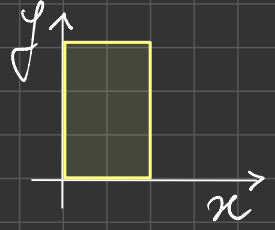
Proprietà: $J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right|^{-1}$

proprietà utile nel caso in cui è più semplice utilizzare $\begin{cases} u = f_1(x,y) \\ v = f_2(x,y) \end{cases}$ piuttosto che $\begin{cases} x = g_1(u,v) \\ y = g_2(u,v) \end{cases}$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

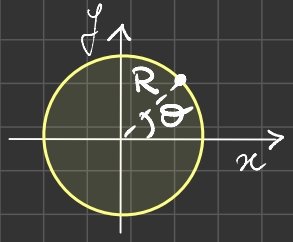
Trasformazioni Notevoli

coordinate lineari



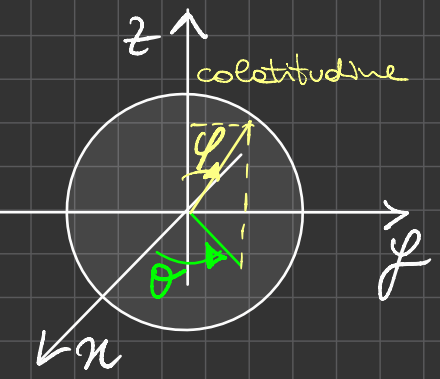
$$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases} \qquad J = |ad - ba|$$

coordinate polari



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & 0 \le \rho \le R \\ y = \rho\sin\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \qquad J = \rho$$

coordinate SFERICHE



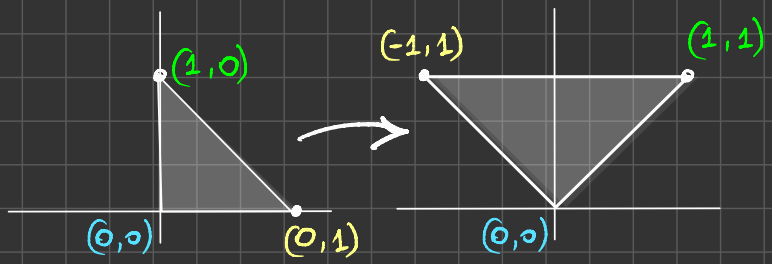
$$\begin{cases} x = \rho\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta & 0 \le \rho \le R \\ y = \rho\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta & 0 \le \varphi \le \pi \\ z = \rho\cdot\cos\varphi & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \qquad J = \rho^2\sin\varphi$$

Esempio

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy = \iint e^{\frac{u}{v}}\cdot\frac{1}{2}\cdot du\,dv$$

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \qquad J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \det\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}$$

x	y	u	v
$(0,0)$		$(0,0)$	
$(1,0)$		$(1,1)$	
$(0,1)$		$(-1,1)$	



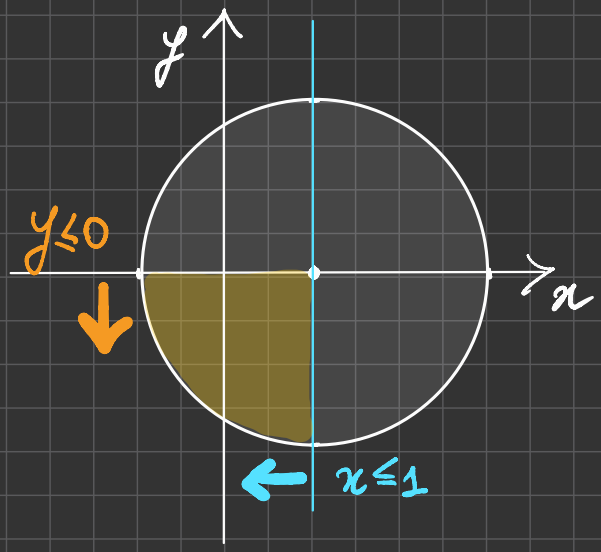
ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

ESEMPIO

calcolare $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ con $f(x)=-y$ e

$D=\{x,y\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\le 4 \; ; \; y\le 0 \; ; \; x\le 1\}$

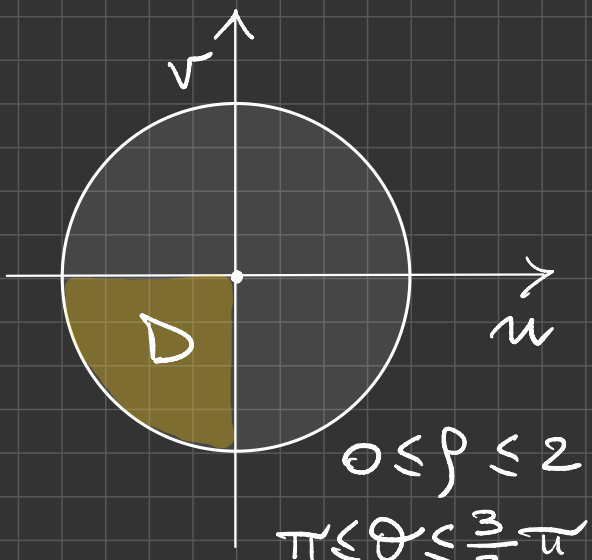
$(x-1)^2+y^2\le 4$ cerchio
centro $(1;0)$ raggio ≤ 2



1) cambio coordinate per traslare il cerchio con centro nell'origine

$$\begin{cases} u=x-1 \\ v=y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=u+1 \\ y=v \end{cases}$$

$$J=\begin{vmatrix} x_u=1 & x_v=0 \\ y_u=0 & y_v=1 \end{vmatrix}=1$$



2) cambio coordinate cartesiane → polari

$$\begin{cases} u=\rho\cos\theta \\ v=\rho\sin\theta \end{cases} \qquad J=\rho$$

$0\le\rho\le 2$

$\pi\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$

$$\int_{x,y} -y\,dx\,dy=\int_{u,v} -v\,du\,dv=-\int_{\rho=0}^{2}\int_{\theta=\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\rho\sin\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=$$

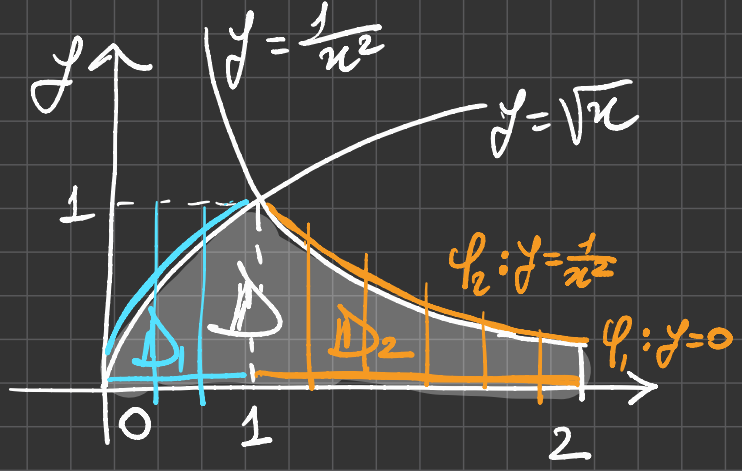
$$=\ominus\int_{\rho=0}^{2}\rho^2\left[-\cos\theta\right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}d\rho=\oplus\int_0^2\rho^2\,d\rho=\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

$-(0-(-1))=-1$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

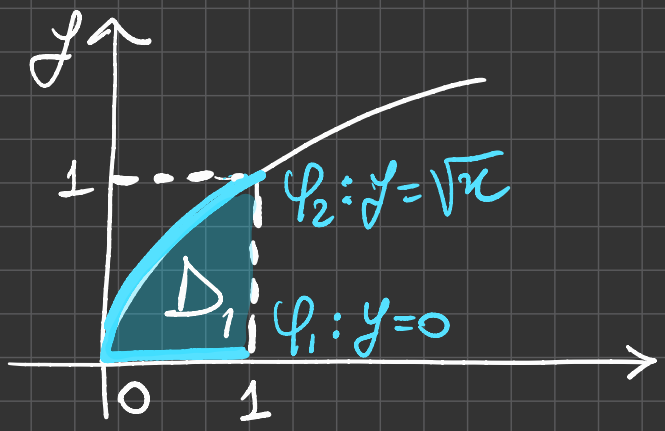
ESEMPIO

Calcolare $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ con $f(x,y)=(1-2x)y$ e D rappresentato in figura

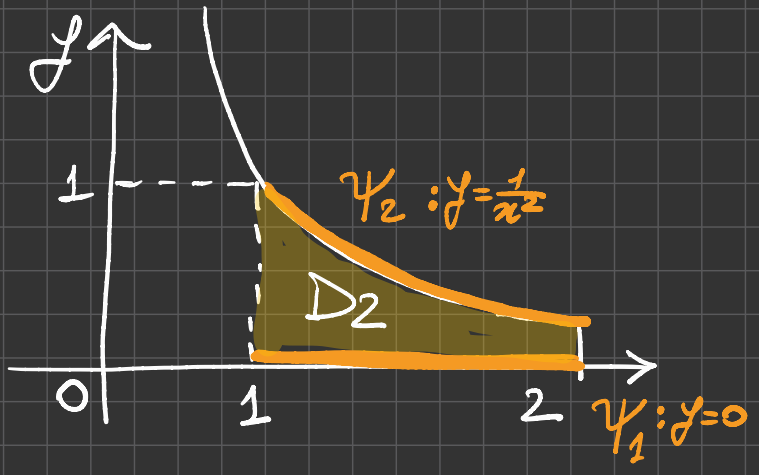


Il punto di intersezione è (1, 1) dunque spezziamo il dominio in $D_1 \cup D_2$ per ottenere domini semplici

$$|D| = |D_1| + |D_2|$$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$$



$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1}\int_{\psi_1}^{\psi_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

...

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Valor medio

utile per il calcolo del baricentro di un corpo

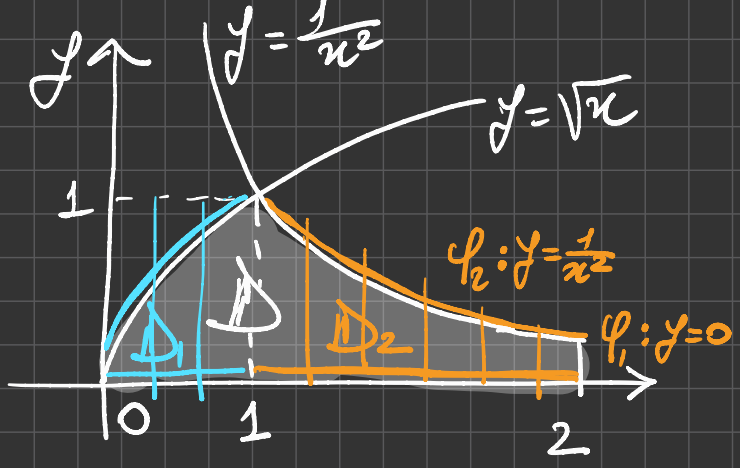
$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\bar{f}_D = \frac{1}{|D|} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

area del dominio $|D| = \iint_D 1\,dx\,dy$

ESEMPIO

$f(x,y) = (1-2x)y$



Il punto di intersezione è (1,1) dunque spezziamo il dominio in $D_1 \cup D_2$ per ottenere due domini semplici rispetto all'asse y

$$|D| = |D_1| + |D_2| = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \ldots = \frac{7}{6}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} = \ldots = -\frac{11}{48}$$

Valore medio $f_D = -\frac{11}{48} \cdot \frac{6}{7} = -\frac{11}{56} \approx -0{,}2$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

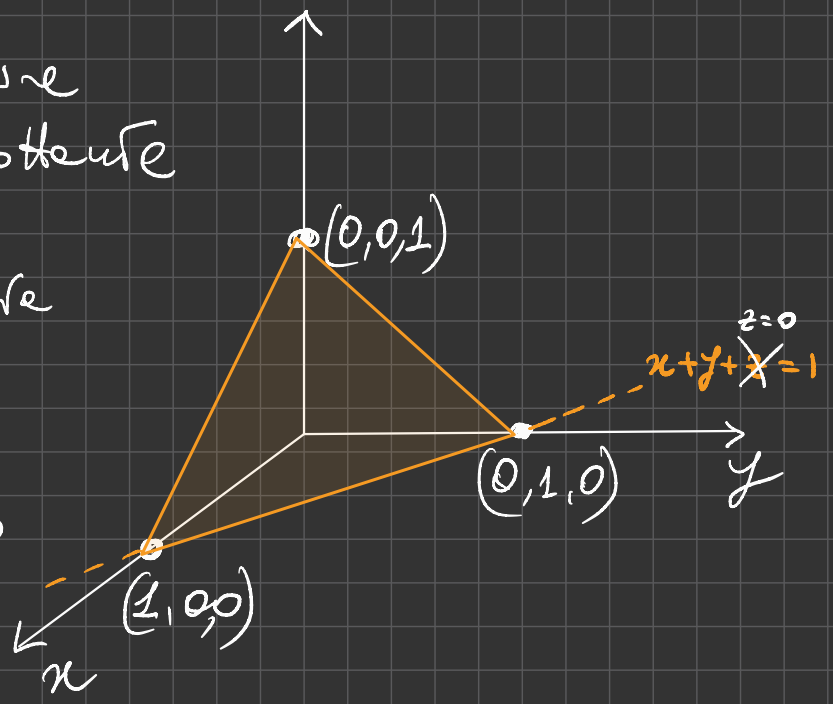
Esempio

Calcolare il valor medio di

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sul dominio

$D\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \leq 1 \quad x,y,z \geq 0\}$

$x,y,z \geq 0$ ci fa capire che siamo nel 1° ottante



per capire cosa rappresenta $x+y+z \leq 1$ consideriamo qualche punto:
sull'asse x sarà $y=z=0$
quindi $x+y+z=1 \rightarrow x=1$
stesso ragionamento sugli altri assi

Il dominio risulta un tetraedro

il valor medio è $\frac{1}{|D|} \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

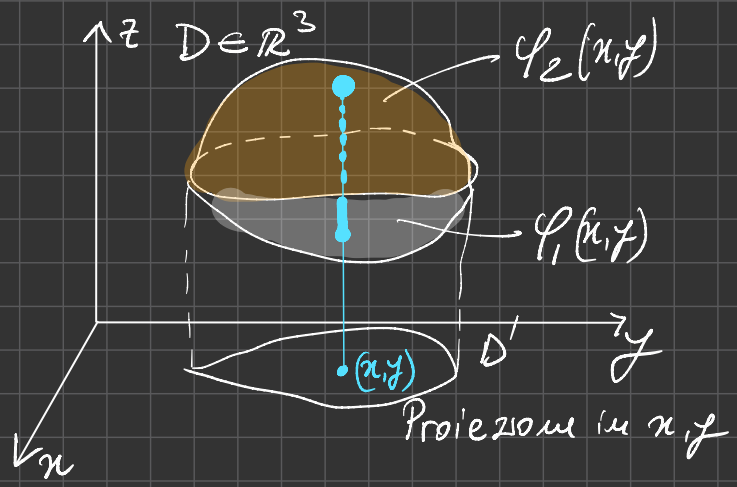
$\hookrightarrow |D| = \iiint_D 1 \cdot dx\,dy\,dz$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Integrali tripli

1) INTEGRAZIONE PER FILI

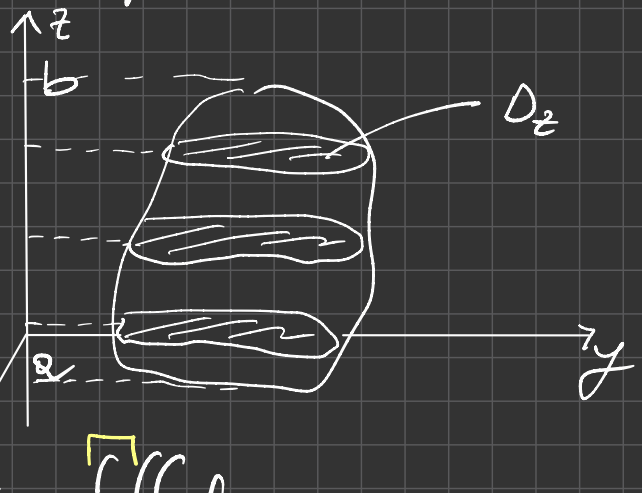
itero il calcolo con un integrale interno e un integrale doppio esterno



$$\iiint_{D\in\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D'} \int_{z=\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

2) INTEGRAZIONE PER "SEZIONI"

itero il calcolo con un integrale doppio interno e un integrale esterno



considero piani paralleli ad (x,y) che sezionano il dominio $D \subset \mathbb{R}^3$

$\forall$ piano $\exists\, D_z \subset \mathbb{R}^2$ a quota z

$$\iiint_{D\in\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{z=a}^{b} \iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

centro di Massa

centro di massa di un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ con densità di massa $\delta(x,y,z)$ è un punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

$$\bar{x} = \frac{\iiint_D x\,\delta\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \delta\,dx\,dy\,dz}$$

$x\,\delta\,dx\,dy\,dz = dm$

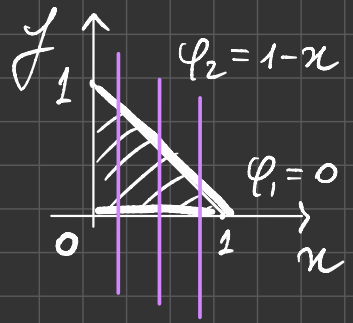
$\delta\,dx\,dy\,dz$ = massa dell'elemento infinitesimo di m

media $\left(\frac{\text{distr. di massa}}{\text{massa oggetto}}\right)$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_D y\,\delta\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \delta\,dx\,dy\,dz} \qquad \bar{z} = \frac{\iiint_D z\,\delta\,dx\,dy\,dz}{\iiint_D \delta\,dx\,dy\,dz}$$

Esempio in $\mathbb{R}^2$

calcolare il centro di massa del triangolo in figura ($\delta = x$)



$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,\delta\,dx\,dy}{\iint_D x\,dx\,dy} = \frac{\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} x\cdot x\cdot dx\,dy}{\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} x\,dx\,dy} = \dots = \frac{1}{3}$$

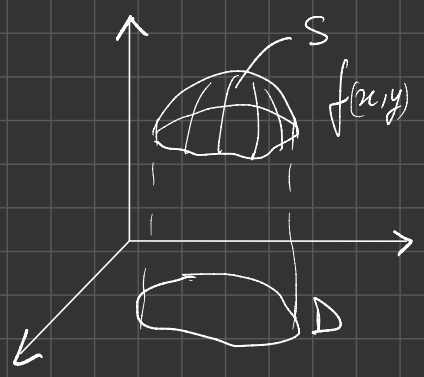
$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\,\delta\,dx\,dy}{\iint_D \delta\,dx\,dy} = \frac{\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} y\cdot x\cdot dx\,dy}{|D|} = \dots \frac{1}{4}$$

$|D|$ = area triangolo $\frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

calcolo superfici

1) superfici sottese da un dominio D



$$|S| = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

Esempio $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad D\{x^2+y^2 \le 1\}$ cerchio di raggio $\rho = 1$ centro $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$|S| = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \sqrt{1+(2x)^2+(-2y)^2}\,dx\,dy = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$$

conviene passare a coordinate polari

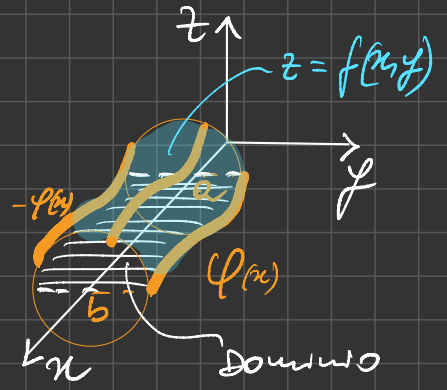
$$= \int_{\rho=0}^{1} d\theta \int_{\theta=0}^{2\pi} \sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\,d\rho = 2\pi\int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho =$$

Pongo $t = 1+4\rho^2$, $dt = 8\rho\,d\rho$, $\rho=0 \to t=1$, $\rho=1 \to t=5$

$$= 2\pi\int_1^5 \frac{1}{8}\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big]_1^5 = \frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

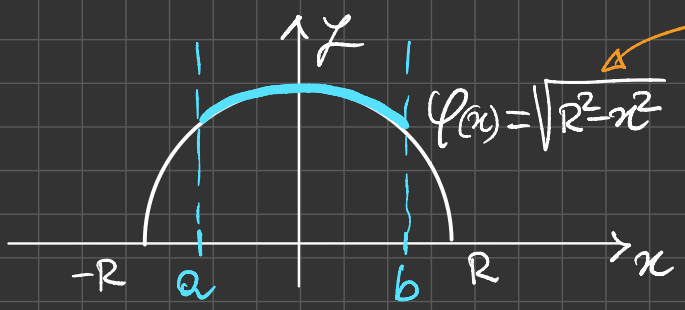
ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

2) Superfici solido di rotazione



$$2\pi \int_a^b \varphi(x)\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx$$

Esempio: calcolo superficie di una parte di sfera



$x^2+y^2=R^2 \rightarrow y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$

facciamo ruotare la parte tra a e b

$$\varphi'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$|S| = 2\pi\int_a^b \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_a^b \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}\,dx = 2\pi R(b-a)$$

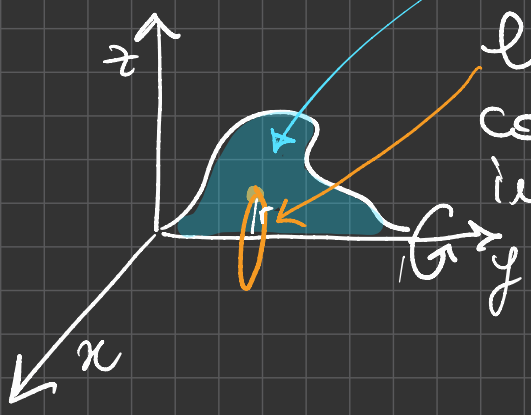
ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Volume solido di Rotazione

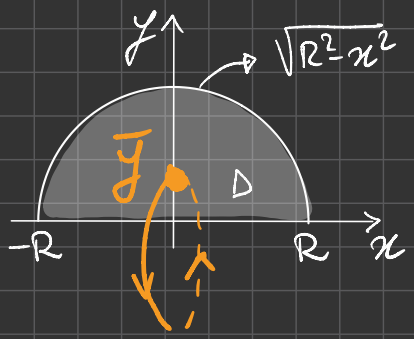
Utilizzo del centro di massa per calcolare il volume di un solido di rotazione.

(Teorema di PAPPO GULDINO)
VOLUME = area sezione che ruota · lunghezza della circonferenza costruita dal centro di massa in rotazione attorno ad un asse

Volume = area sezione che ruota
per
lunghezza della circonf. $(2\pi \cdot r)$
costruita dal centro di massa
in rotazione attorno ad un asse



Esempio



$\bar{x} = 0$ (per simmetria e omogeneità)
$\bar{y} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$ (calcoli svolti nell'esercizio)

$$\text{Sfera di raggio } R = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi \bar{y} = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi \frac{4R}{3\pi} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

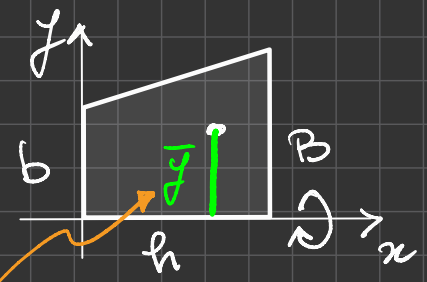
Area sezione

Lunghezza circonferenza del punto medio che ruota

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Esempio

volume del solido generato dalla rotazione del trapezio attorno l'asse x (cono tagliato)



TRAPEZIO RETTANGOLO $\bar{y} = \frac{(B^2+Bb+b^2)}{3(B+b)}$

volume = Area sezione · cerchio di raggio $\bar{y}$

$$V = |D| \cdot 2\pi\bar{y} = \frac{(b+B)h}{2} 2\pi \frac{(B^2+Bb+b^2)}{3(B+b)} = \frac{\pi h}{3}(B^2+Bb+b^2)$$

per $b=0$ si ha il cono completo $V = \frac{\pi h}{3} B^2$

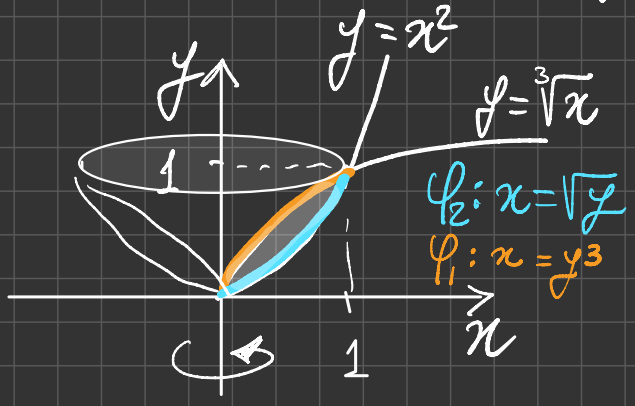
ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Esempio

Calcolare il volume del solido di rotazione di $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le \sqrt[3]{x}\}$ attorno asse y

$$|S| = 2\pi\int_a^b \sqrt{1+\varphi'^2}\,dy$$

$$\varphi_1' = 3y^2 \qquad \varphi_2' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$



$$|S_1| = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+\varphi_1'^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1+9y^4}\,dy$$

difficile risolverlo...

...applichiamo il Teorema di Pappo-Guldino

$$|S| = 2\pi\,\bar{x}\cdot \text{Area} = 2\pi\,\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{12} = \pi\,\frac{5}{14}$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\delta\,dx\,dy}{\iint_D \delta\,dx\,dy} = \frac{\int_{x=0}^{1} x\int_{y=x^2}^{\sqrt[3]{x}} dx\,dy}{\int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{\sqrt[3]{x}} dx\,dy} =$$

($\delta=1$)

$$= \frac{\int_{x=0}^{1} x\left(\sqrt[3]{x}-x^2\right)dx}{\int_{x=0}^{1}\left(\sqrt[3]{x}-x^2\right)dx} = \frac{\left[\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1}{\left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1} = \frac{\frac{3}{7}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}} = \frac{3}{7}$$

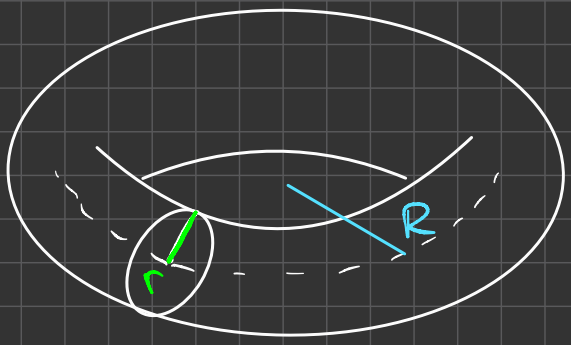
$$= \frac{12-7}{28}\cdot\frac{12}{9-4} = \frac{5}{28}\cdot\frac{12^3}{5^1}$$

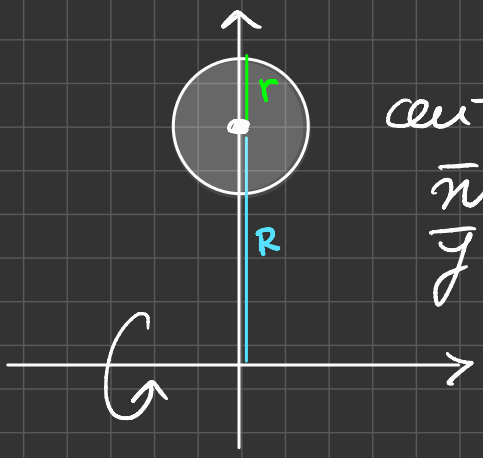
$$\text{Area} = \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Applicazione di PAPPO GULDINO

Calcolo del volume di un TORO (rotazione di un cerchio di raggio r attorno ad un asse a distanza R



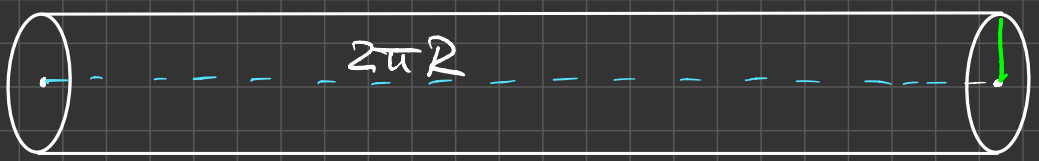


centro di massa
$\bar{x} = 0$
$\bar{y} = R$

$$\text{volume} = \pi r^2 \cdot 2\pi R =$$

πr^2: Area sezione
$2\pi R$: lunghezza circonferenza del punto medio che ruota

corrisponde al volume di un cilindro con raggio di sezione r e lunghezza $2\pi R$



non tutte le figure possono essere "ricondotte"

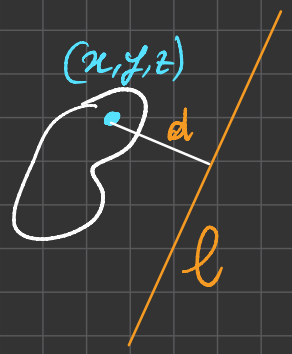
Il toro ha una simmetria tra elementi e "estremi" e elementi che contribuiscono

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Def Momento d'inerzia

di un corpo $D \subset \mathbb{R}^3$ con densità di massa δ, rispetto ad una retta ℓ

$$I_\ell = \iiint_D d^2((x,y,z),\ell) \cdot \delta \cdot dx\,dy\,dz$$



con $d((x,y,z),\ell)$ distanza della retta ℓ

NB la distanza dell'elemento infinitesimo di un corpo dell'asse x è $d_x = \sqrt{y^2+z^2}$.

analogamente $d_y = \sqrt{x^2+z^2}$ $\quad d_z = \sqrt{x^2+y^2}$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Integrali Curvilinei

invece di integrare su un segmento, integriamo su una curva di un piano.

Primo tipo

1) $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$

modulo del vettore velocità

secondo tipo (campo vettoriale)

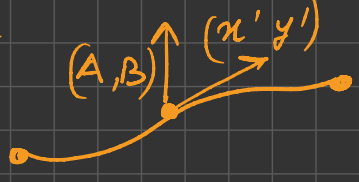
2) $F: \Omega \to \mathbb{R}^2$ $\quad \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_\gamma w = \int_a^b A(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + B(x(t),y(t)) \cdot y'(t)\,dt$

- $F(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$ campo vettoriale $\quad \int_\gamma \vec{F}\,d\vec{\gamma}$
- $w = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ forma differenziale $\quad \int_\gamma w$

2 notazioni di scrittura: forma vettoriale e forma differenziale

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{\gamma} = \int_\gamma w = \int_a^b \left[A(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + B(x(t),y(t)) \cdot y'(t)\right] dx\,dy$$

corrisponde al prodotto scalare $(A,B) \cdot (x',y')$



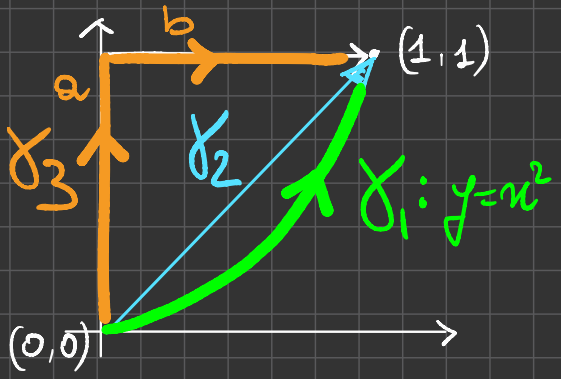
ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Se il risultato non dipende dalle curve di integrazione il campo vettoriale è conservativo (la forma differenziale è esatta)

Esempio

campo vettoriale
$F(x,y) = (y^2, 2xy)$

forma differenziale
$\omega = y^2 dx + 2xy\, dy$



$\gamma_1(t) = (t, t^2) \quad t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = (t, t) \quad t \in [0,1]$

$\gamma_3(t) = \begin{cases} a: (0,t) & t \in [0,1] \\ b: (t,1) & t \in [0,1] \end{cases}$

$$\int_{\gamma_1} F\,d\gamma = \int_{\gamma_2} F\,d\gamma = \int_{\gamma_3} F\,d\gamma = 1 \rightarrow$$ campo conservativo (forma differenziale esatta)

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Def Una forma differenziale $\omega = A\,dx + B\,dy$ è **ESATTA** in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se esiste una funzione scalare il cui gradiente coincide col campo vettoriale (A, B)

$$\exists\, U : \Omega \to \mathbb{R} \;/\; A = \frac{\partial U}{\partial x},\ B = \frac{\partial U}{\partial y} \longrightarrow \omega \text{ esatta in } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$(A, B) = \nabla U \rightsquigarrow U \text{ funzione potenziale (scalare)}$$

dimostrazione

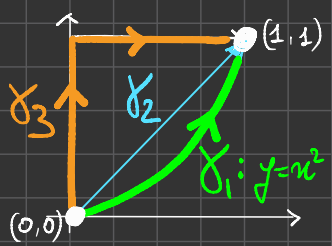
$$\int_\gamma F\,dy = \int_a^b \Big(\underbrace{A(x,y)}_{\frac{\partial U}{\partial x}}\, x'(t) + \underbrace{B(x,y)}_{\frac{\partial U}{\partial y}}\, y'(t)\Big)\,dt = \int_a^b \frac{d\big[U(x(t), y(t))\big]}{dt}\,dt = U(x,y)\Big]_a^b = U_b - U_a$$

significato:

l'integrale dipende solo dai punti iniziale e finale, quindi non dipende dalle curve.

Il calcolo si riduce a: $\int_\gamma F\,dy = U_b - U_a$

Esempio Applichiamo all'esercizio precedente:



$$F(x,y) = (y^2, 2xy) \qquad U = xy^2 \leftarrow \frac{\partial U}{\partial x} = y^2,\ \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy$$

$$\int_\gamma F\,dy = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) = xy^2\Big|_{(1,1)} - xy^2\Big|_{(0,0)} = 1 - 0 = 1$$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Risultato generale:

Ω aperto e connesso 

$\Rightarrow$ ω esatta $\Rightarrow \exists U$

$\forall a,b \in \Omega \ \exists \gamma$ che li unisce

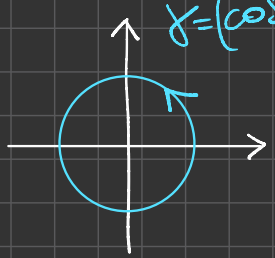
Se la forma differenziale gode della proprietà di essere "esatta", l'integrale dipende solo dai punti iniziale e finale del percorso γ

verifica pratica: ω esatta $\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0 \ \forall \gamma$ chiuso

Esempio

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \quad \text{in} \quad \Omega = \mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$$

Per verificare che la forma diff. non è esatta, è sufficiente trovare una curva γ chiusa per cui $\int_\gamma \omega \neq 0$



$\gamma = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin t}{1}(-\sin t) + \frac{\cos t}{1}\cos t \right) dt = 2\pi \neq 0$$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

ω non è esatta

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Finora abbiamo visto:

1) Se trovo $U \mid \frac{\partial U}{\partial x} = A \quad \frac{\partial U}{\partial y} = B \rightarrow \omega$ esatta
2) Se trovo γ chiusa $\mid \int_\gamma \omega \neq 0 \rightarrow \omega$ non è esatta

Def $\omega = A\,dx + B\,dy$ si dice **chiusa** in Ω se $\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} \quad \forall (x,y) \in \Omega$

Teorema ω esatta $\rightarrow$ ω chiusa

$\exists U \mid \frac{\partial U}{\partial x} = A \quad \frac{\partial U}{\partial y} = B$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

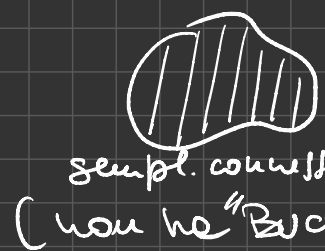
$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

uguali per il Teorema di Schwarz

Teorema

1) ω chiusa
2) Ω semplicemente connesso

$\rightarrow$ ω Esatta



sempl. connesso (non ha "Buchi")



connesso

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Determinare U (PROCEDURA)

è importante aggiungere la costante perché in questo caso è funzione di y (abbiamo integrato in dx)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = A = y^2 \longrightarrow U(x,y) = \int y^2\,dx = y^2x + c(y) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = B = 2xy \longrightarrow \dfrac{\partial U}{\partial y} = 2xy + c'(y) \end{cases}$$

dove essere

poiché $\frac{\partial U}{\partial y}$ deve essere $= B = 2xy$

allora $c'(y) = 0 \rightarrow c(y) = cost.$

$U(x,y) = y^2x + cost$ sono tutte le funzioni potenziali associate alla forma differenziale ω

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Riassunto INTEGRALI CURVILINEI

int. curv. I° tipo (calcolo di lunghezze)

II° tipo (Integrare campi vettoriali o forme differenziali lungo curve in $\mathbb{R}^2$

Forme differenziali
- esatte → ammette funzione potenziale (si calcola il suo valore agli estremi ed evito di calcolare l'integrale)
- non esatte

Teorema di GAUSS GREEN $\iint_D \leftrightarrow \int_\gamma$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it