ALGO

WWW.ALGORITMOSTEM.IT

SCIENCE TECHNOLOGY ENGINEERING MATHEMATICS

Appunti di Algebra1:

Insiemi numerici N.Z.Q.R.C.H.

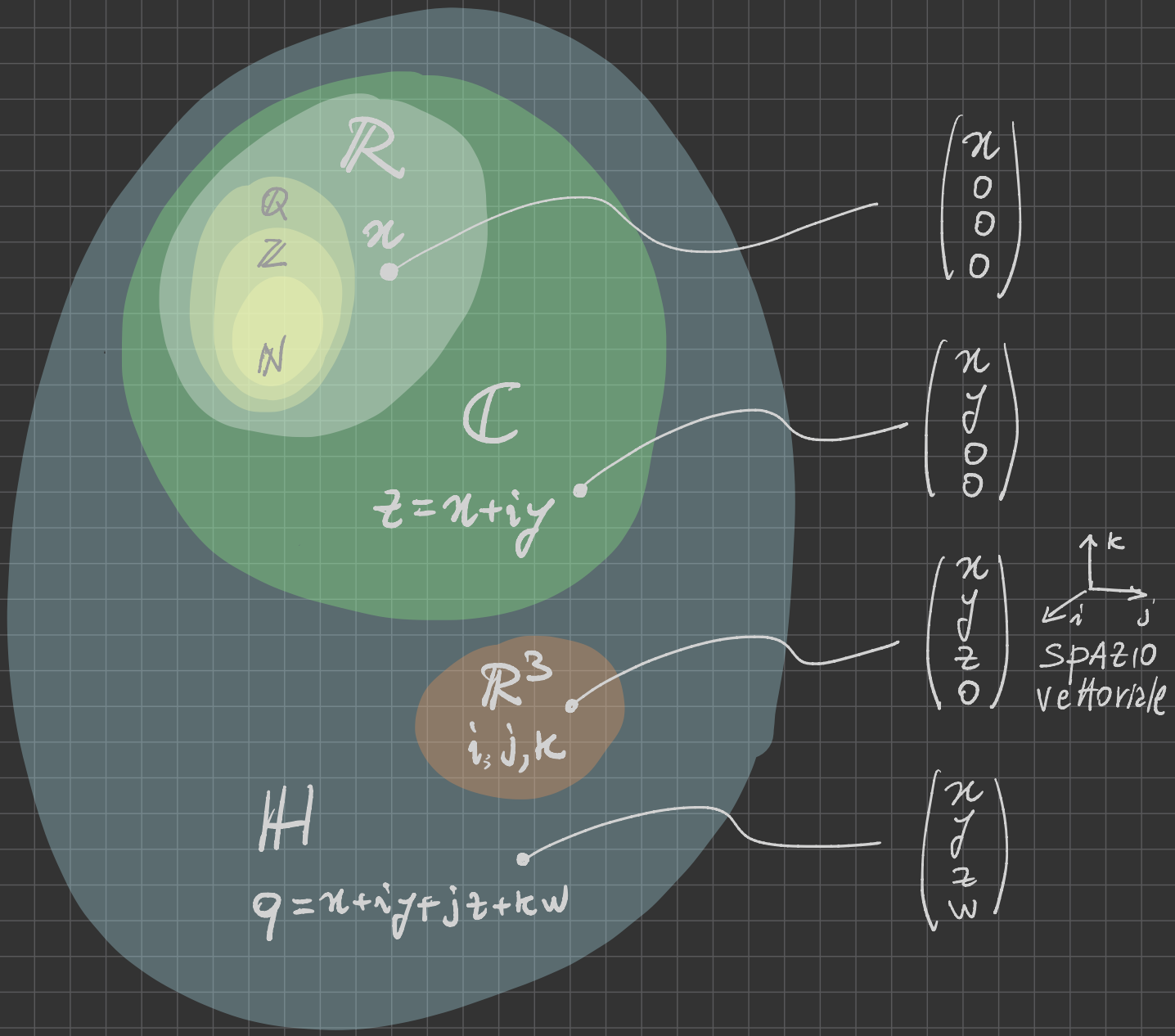
UNI - Matematica

rev.0.1 - 05 set 2023

Draft version

Appunti in formato bozza, intesi esclusivamente di ausilio alle lezioni, che le integrano nelle descrizioni e nei ragionamenti su quanto viene riportato in queste pagine.

Licenza Creative Commons CCBYNCND.
È consentita la condivisone del documento originale a condizione che non venga modificato né utilizzato a scopi commerciali, sempre attribuendo la paternità dell'opera all'autore



ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

$\mathbb{N}_0$ $\{0, 1, 2, \dots\}$ numeri naturali

$(\mathbb{N}_0, +)$ monoide commutativo

$(\mathbb{N}_0, \cdot)$ monoide commutativo

$\mathbb{Z}$ $\{\dots -1, 0, 1, \dots\}$ numeri relativi

Insieme quoziente $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ rispetto ad $\mathcal{R}$

$(n, m)\,\mathcal{R}\,(n', m')$ sse $n + m' = m + n'$

$\mathbb{Z}(+, \cdot)$ Anello commutativo

$\mathbb{Q}$ $\{\dots -\frac{1}{2}, \dots \frac{3}{5} \dots\}$ numeri razionali

$(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d)$ sse $ad = bc$

con (a, b) e $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ Campo (estensione di $\mathbb{Z}$)

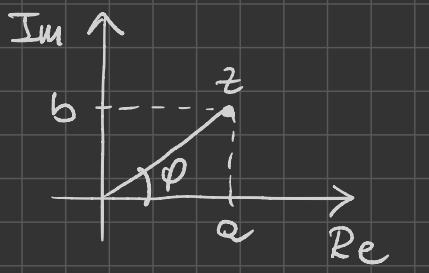
$\mathbb{R}$ numeri reali

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ campo

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

$$\mathbb{C} \left\{ z = a + ib \,/\, a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{con } i^2 = -1$$

Parte reale — Parte immaginaria



PIANO di ARGAND - GAUSS

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ campo

somma $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

prodotto $(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$ somma tra conseguenti diff tra antecedenti

def coniugato $\bar{z} = a - ib$

norma (modulo) $|z| = z \cdot \bar{z} = \sqrt{a^2+b^2}$

rappr. trig $z = a + ib = r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$

rappr. esp. $\rho(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta) = \rho\, e^{\pm\theta i}$

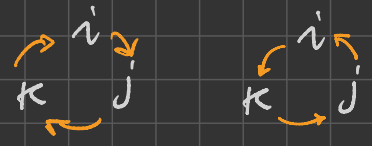
proprietà $z z' = r r' (\cos(\theta+\theta') + i \operatorname{sen}(\theta+\theta'))$

$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

$\mathbb{H}$: $\{q = a + bi + cj + dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ Quaternioni

Parte reale — Parte immaginaria



[1] con $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

$ij = k$ $\quad ji = -k$
$jk = i$ $\quad kj = -i$
$ki = j$ $\quad ik = -j$

con la regola [1] definiamo le operazioni di somma e prodotto:

esempio di calcolo:
$ijk\,k = -1\,k$ (k sopra -1)
$ij = k$

$(\mathbb{H}, +, \cdot)$ campo non commutativo (corpo)
(rispetto a $(\mathbb{C}; \cdot)$ perdiamo la prop. commutativa -ve)

Def coniugato $q^* = a - ib - jc - kd$
norma $|q| = \sqrt{q q^*} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

$\exists$ isomorfismo $\xi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^4$

rappr bicomplessa $q = a + bi + cj + dk$ ($k = ij$)
$q = (a + bi) + (c + di)\,j$
$q = \underbrace{(a + bi)}_{z_1} + \underbrace{(c + di)}_{z_2} \cdot j$

RAppr. Matriciale (spazio vettoriale)

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = 1 \cdot a + I b + J c + K d = \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -w^* \\ w & z^* \end{pmatrix}$$

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Def DX (**Derivato** dell'insieme X)

Insieme dei punti di accumulazione di X

Def **Aderenza** : $X \cup DX$

Unione tra l'insieme e il suo derivato (corrisponde alla chiusura dell'insieme)

Def **X chiuso** $\Leftarrow$ $X \supseteq DX$

Un insieme è chiuso se contiene il proprio derivato

Def **X chiuso** $\Leftarrow$ $X \equiv DX \cup X$

Un insieme è chiuso se coincide con la propria aderenza

Def Una proprietà di x è definitivamente verificata se esiste un opportuno intorno di x in cui la proprietà è verificata

ES. X è definitivamente positive

$\exists\, x_0 \in X \;/\; \forall\, x \in I(x_0) - \{x_0\} \rightarrow f(x) > 0$

ES. $\sin(x)$ è definitivamente positive nell'intorno destro di "0"

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it

Def Dato un insieme X, si dice:

maggiorante	qualsiasi $k \in \mathbb{R} / k \geq x \ \forall x \in X$
minorante	qualsiasi $k \in \mathbb{R} / k \geq x \ \forall x \in X$
MASSIMO	(se esiste) $M \in \mathbb{R} / M \in X \wedge M \geq x \ \forall x \in X$
minimo	(se esiste) $m \in \mathbb{R} / m \in X \wedge m \leq x \ \forall x \in X$
estremo sup.	il minimo dei maggioranti
estremo inf.	il massimo dei minoranti

limitato sup.	se ammette almeno un maggiorante
limitato inf.	se ammette almeno un minorante
limitato	se è limitato inf. e sup.
illimitato	se non è limitato

ALGO - licenza d'uso creative common CCBYNCND - www.algoritmostem.it